数理解析研究所講究録
887巻 1994年 121-140

Some results on Bochner-type theorems

岡山県立大情報工　高橋泰嗣　(Yasuji Takahashi)

§1. Introduction

有限次元空間で知られているBochner の定理は、無限次元空間 (nuclear space)に対し一般化される。

Theorem 1.1. Let E be a nuclear space with the dual E' . Then every continuous cylindrical measure μ on E' is σ-additive ($\sigma(E',E)$-Radon.)

この定理は、E が metrizable のときは Minlos[7]により、また、一般の場合は山崎(Umemura[16]) によって証明された。ところで、E が σ-Hilbert space のとき、Bochnerの定理が成立するためには、 nuclearity が必要となる。したがって、E が Hilbert space のとき、Bochner の定理が成立するのは有限次元に限る。Hilbert space 上の cylindrical measure については、次の結果が知られている(Sazonov-Minlos theorems [7],[13]) 。

Theorem 1.2. A cylindrical measure μ on a Hilbert space H is σ-additive iff it is continuous with respect to the Hilbert-Schmidt topology.

Theorem 1.3. Let H and G be Hilbert spaces and T : H → G be a continuous linear operator. Then T is of Hilbert-Schmidt type iff for each continuous cylindrical measure μ on H, the image T(μ) is σ-additive on G.

これら3つの定理は密接に関連しているが、小論では、これらの定理の一般化について、すでに知られている結果も含めて、そのいくつかを紹介し、相互の関連について考えたい。

§ 2. p-radonifying operators and p-summing operators

ここでは、定理1.3 の Banach space への一般化として、Schwartzによる "p-radonifying operator" の理論を紹介しその結果を用いて、定理1.1 の一般化および関連した結果について述べる。

E, F を Banach space, E', F' を dual space とする。(E', F'は Banach space である。) E 上の cylindrical measure (c.m.) μ に対し、その特性関数 (ch.f.) は

$$\hat{\mu}(x') = \int_E \exp(i\langle x, x'\rangle)\, d\mu(x), \quad x' \in E'$$

で定義される。この μ(x')が E' 上で連続のとき、μ は連続

な c.m. という。(μが E' 上の c.m. のときは、その特性関数μ(x) は E 上で定義される。)ところで、c.m. μに対し、対応する random linear functional (r.l.f.)を $L: E' \to L_0(\Omega, P)$とするとき、μが連続なることと、r.l.f. L が連続なることは同等である。(r.l.f. に関する詳細は、Dudley[1] を参照。)ここで、$L(E') \subset L_p(\Omega, P)$, $0<p<\infty$, であればμは weak p-th orderという。更に、$L: E' \to L_p(\Omega, P)$ が連続であれば、c.m.μは type p という。(連続な c.m. μは type 0 ということにする。)

Definition 2.1. Let $T:E \to F$ be a linear operator.

(1) T is p-radonifying, $0 < p < \infty$, if for each c.m.μ on E of type p, the image $T(\mu)$ is a Radon measure on F.

(2) T is p-summing, $0 < p < \infty$, if for each weakly p-summable sequence $\{x_n\}$ in E, the sequence $\{Tx_n\}$ in F is absolutely p-summable. In particular, we say "absolutely summing" instead of "1-summing".

p-radonifying operatorとp-summing operatorの関係について、次の結果がある(Schwartz[14])。

Theorem 2.1. Let $1 < p < \infty$. Then $T: E \to F$ is p-summing iff it is p-radonifying.

この定理は、$0 < p \leqq 1$ では成立しない。$p = 1$のとき E' or F が Radon-Nikodym propertをもてば、定理は成立する。ただし、p-radonifying ならば、常に p-summingである。$0 < p < 1$ のときは、次の結果がある。

Theorem 2.2. Suppose that E' has the metric approximation property(m.a.p.). If $T : E \to F$ is p-summing, then for each c.m.μ on E of type p, $T(\mu)$ is Radon on $\sigma(F'', F')$. (In this case, if F is reflexive, then $T(\mu)$ is Radon on F.)

定理1.3 の一般化として、次の結果を得る。

Theorem 2.3. Suppose that E' has the m.a.p. and F is reflexive. Then $T : E \to F$ is p-summing, $0 < p < 1$, iff for each continuous c.m.μ on E, $T(\mu)$ is Radon on F, that is, T is 0-radonifying.

$T : E \to F$ が p-summing, $0 < p < 1$, のとき、任意の $r > 0$ に対し、T は r-summingとなる。このような T は completely summing という。0-radonifying operator は常に completely summing であるが、逆は一般に成立しない。m.a.p.の代わりにtypeを仮定することがある。通常２種類の定義(stable と Rademacher)があるが、ここでは、stable type の意味で使う。任意の Banach space は、type p,

$0 < p < 1$,であり、 type 1 であれば、ある $p > 1$ があって type p となる。（定義および関連した結果は後述する）

Theorem 2.4. Suppose that E' has type 1 . Then $T: E \to F$ is completely summing iff it is 0- radonifying.

ここで、定理1.1 の一般化を考える。

Theorem 2.5. Let E, F be locally convex Hausdorff spaces, and $T : F \to E$ be a continuous linear operator. Suppose that there is a fundamental family $\{\| \|_\alpha\}$ of continuous seminorms on E such that each associated Banach space E_α of $(E, \| \|_\alpha)$ has the m.a.p. Suppose also that for each continuous seminorm $\| \|_\alpha$ on E, there is a continuous seminorm $\| \|_\beta$ on F such that $T : F_\beta \to E_\alpha$ is dual completely summing. Then for each continuous c.m. μ on E', the image $T'(\mu)$ is Radon on $\sigma(F', F)$.

Remark. E = F, T = I (identity map) とする。 E が nuclear space のとき、定理2.5 の条件は満たされるので、定理1.1 が従う。また、定理2.5 の E に関する条件で、m.a.p.の代わりに、各 E_α が type 1 をもつとしてもよい。

Okazaki-Takahashi [10]による次の結果は、定理2.5 より従う。しかしながら、その証明は本質的に同じである。

Corollary 2.6. Let $T : F \rightarrow E$ be a continuous linear operator. Suppose that E satisfies the same assuption as in Theorem 2.5 and F is barrelled. Suppose also that E admits a T(F)-accessible Borel probability measure. Then for each continuous c.m. μ on E', the image $T'(\mu)$ is Radon on $\sigma(F',F)$.

この結果は、 abstract Wiener space と Bochner's theorem の関連を述べた Okazaki [9], Sato [12] の結果を一般化する。詳細は、これらの文献を参照されたい。

また、定理1.1 の逆問題、つまり nuclearity の必要性については、 Okazaki-Takahashi [11] を参照されたい。

§3. p-stable cylindrical measures and Λ_p-operators

Schwartzの p-radonifying operator の理論は、 type p の c.m. μ の Radon extensionに関するものであったが、ここでは、p-stable cylindrical measure μ の Radon extension について紹介する。以下、E は Banach space, μ は E上の c.m. とする。μ の特性関数 (ch.f.) $\hat{\mu}(x')$ は E'上で定義された positive definite function である。

Definition 3.1. Let $0 < p \leq 2$.

(1) μ is p-stable symmetric if there is a linear ope-

rator T from E' into some L_p such that $\exp(-\|Tx'\|^p)$, $x' \in E'$, is the ch.f. of μ. In particular, if $p = 2$, then μ is called Gaussian.

(2) $T : E' \to L_p$ is a Λ_p-operator if $\exp(-\|Tx'\|^p)$, $x' \in E'$, is the ch.f. of a Radon measure on E.

以下、p-stable c.m. としては、このようなものを考える。(すなわち、symmetric なものだけを扱う。) p-stable c.m. or Λ_p-operatorについては、非常に多くの結果が知られているが、そのいくつかを紹介する。詳細は、Linde [4] を参照されたい。(Ω, P) を probability space, $0 < p \leqq 2$ とする。linear operator $T : E' \to L_p(\Omega, P)$ が連続のとき、r.l.f. Tに対応する E上の c.m. をνとする。νは type pである。

Definition 3.2. T is decomposed if ν is Radon on E. Moreover, ν is Radon of order p, that is,

$$\int_E \|x\|^p d\nu(x) < \infty$$

then T is called p-decomposed.

Definition 3.3. Let $\{x_n\}$ be any weakly p-summable sequence in E and μ be a p-stable c.m. on E with the ch.f. $\exp(-\sum|\langle x_n, x'\rangle|^p)$, $x' \in E'$, where $0 < p \leqq 2$.

(1) E is said to be of (stable) type p if the conver-

gence of $\Sigma \|x_n\|^p$ is sufficient for μ to be Radon.

(2) E is said to be of (stable) cotype p if the convergence of $\Sigma \|x_n\|^p$ is necessary for μ to be Radon.

Theorem 3.1. E is of type p iff every p-decomposed operator $T : E' \to L_p(\Omega, P)$ is a Λ_p-operator.

Remark. If $0 < p < 2$, then every Λ_p-operator is p-decomposed. But for $p = 2$, this is false; this is true for $p = 2$ iff E is of cotype 2.

Theorem 3.2. Let $1 < p < 2$, and $T : E \to F$ be a linear operator.

(1) If for each continuous p-stable c.m. μ on E, $T(\mu)$ is Radon on F, then T is p-summing.

(2) Suppose that F is of type p. If T is p-summing, then for each continuous p-stable c.m. μ on E, $T(\mu)$ is Radon on F.

Remark. (1)は任意のBanach spaceが cotype p ($p < 2$) ということから示される。 $p = 2$のときは、(1) が成立するための必要十分条件は、E がcotype 2なることである。他方、$p = 2$ のとき、 Gaussian c.m.は type 2 であるから, (2) は任意のBanach spaceに対して成立する。

Corollary 3.3. If any continuous p-stable c.m. on E is Radon, $0 < p < 2$, then E is of finite dimension.

Remark. This is true for $p = 2$ (Linde-Pietsch [5]).

これによって、無限次元 Banach space 上では、 c.m. の class を p-stable c.m. に制限しても、定理1.1 のような結果を得ることはできない。そこで、 p-stable c.m.のclass に対し、定理1.2 と類似の議論をしたい。この議論は、次の§で行う。最後に、Λ_p-operatorと0-Radonifying operator の関係を述べる。

Theorem 3.4. Any Λ_p-operator from E' into L_p is τ_k-continuous and completely summing; where $\tau_k = \tau_k(E', E)$ is the Mackey-topology.

Remark. If $T : E' \to L_p$ is a Λ_p-operator, $1 < p \leqq 2$, then T' is a continuous linear operator from $(L_p)'$ into E. In this case, $\mu = T'(\gamma_p)$ is a p-stable Radon measure on E. Here γ_p denotes the canonical p-stable c.m. on $(L_p)'$ with the ch.f. $\exp(-\|f\|^p)$, $f \in L_p$. (For $p = 2$, γ_2 is called a canonical Gaussian c.m.

Theorem 3.5. Any Λ_2-operator from E' into a Hilbert space H is 0-radonifying.

Theorem 3.6. Suppose that E has the m.a.p. or type 1. Then for $1 < p < 2$, any Λ_p-operator from E' into L_p

is 0-radonifying.

Remark. 定理3.5は、Gross[2], Okazaki[9], Sato[12]によって、本質的には知られている。定理3.6は、定理2.3, 定理2.4,定理3.4より従う。ここで、 E の条件 (m.a.p. or type 1) が必要か否かは不明である。Λ_p-operatorと p-summing (or p-nuclear) operator の関連において、様々なBanach spaceの特徴付がなされているが、ここでは省略する。これらの詳細は、 Linde [4], Takahashi-Okazaki [15] 等を参照されたい。

§4. Sazonov-type topologies

ここでは、定理1.2 を Banach space に一般化した結果について考察する。以下、E を Banach space, E' を dual space, $\tau_K = \tau_K(E',E)$ を Mackey-topology を表すものとする。 E' 上の vector topology τ_1, τ_2 に対し、identity map : $(E', \tau_1) \to (E', \tau_2)$ が連続のとき、$\tau_1 \geqq \tau_2$ で表す。 τ_1 が τ_2 より真に強いとき、$\tau_1 > \tau_2$ で表す。E 上のc.m.μと E' 上の vector topology τ に対し、μがτ－連続とは、その特性関数$\hat{\mu}$がτ－連続なることである。

Definition 4.1. Let τ be a vector topology on E'.

(1) τ is said to be sufficient if every τ-continuous c.m. μ on E is Radon; that is, the τ-continuity of μ is sufficient for μ to be Radon.
(2) τ is said to be necessary if every Radon probability measure μ on E is τ-continuous; that is, τ-continuity is necessary for μ to be Radon.
(3) τ is said to be an S-topology if it is necessary and sufficient. E is said to be an S-space if there is an S-topology on E'.

Remark. Hilbert space H (H = H')は S-spaceである。実際、τ_{HS} (Hilbert-Schmidt topology) は S-topology である。 Banach space については、E が S-spaceであれば、E は L_0 の部分空間と同型である（ Eがm.a.p.をもてば、逆も成立。）特に、S-space は cotype 2 である。S-space の閉部分空間は S- space であり、 L_p, $1 \leqq p \leqq 2$, およびその閉部分空間(S_p-type) は S-spaceである。このような空間についての詳細は、Mushtari[8] を参照されたい。

これより、一般の Banach space 上の sufficient topology について考えたい。次に定義するτ_{HS}は、いつでもsufficientである。

Definition 4.2. Let H be a separable Hilbert space.

(1) An operator $T : (E', \tau_K) \to H$ is said to be of Hilbert-Schmidt type if it is factorizable by a Hilbert-Scmidt operator between Hilbert spaces.

(2) The Hilbert-Schmidt topology τ_{HS} on E' is the weakest vector topology making all Hilbert-Scmidt operators $T : (E', \tau_K) \to H$ continuous.

Remark. $T : (E', \tau_K) \to H$ が Hilbert-Schmidt type であるための必要十分条件は、ある 2-summing operator $S : H \to E$ が存在して、$T = S'$ となることである。
また、τ_{HS}は locally convex topologyであり、その位相は τ_K-continuous seminorms $\{\| T(\ ) \|_H\}$ のfamilyで定義される。もちろん、これらの seminormsはHilbertianである。(seminorm が Hilbertian とは、associated Banach space が Hilbert spaceということである。) 一般に、associated Banach space が、type p, cotype q, m.a.p.等をもつとき、seminormがそれらの性質をもつといい、そのようなseminormsのfamilyで定義された locally convex topology τは、type p, cotype q, m.a.p.等をもつということにする。
Hilbert space H 上のsufficient topology τがHilbertianであれば、$\tau \leqq \tau_{HS}$ となる。より一般の結果については、以下で述べる。従って、τ_{HS}より真に強い H上のsufficient

topologyτを見いだすためには、τの性質を考察する必要がある。次に定義するτ_mは、τ_{HS}より真につよい。

Definition 4.3. Let H be a separable Hilbert space, $\| \ \|$ a continuous seminorm on H, and B the associated Banach space.

(1) $\| \ \|$ is said to be measurable (in the sense of Gross) if i': $B' \to H$ is a Λ_2-operator, where $i : H \to B$ is the natural map. In this case, if i is one-to-one ($\| \ \|$ is norm), then (i,H,B) is called an abstract Wiener space.

(2) The topology τ_m on H is the weakest vector topology making all measurable seminorms on H continuous.

Remark. すべての measurable seminorms が m.a.p. をもつわけではないが、τ_m は m.a.p. をもつ measurable seminorms の fundamental family によって定義される。従って、τ_m は m.a.p. をもつ。また、Hilbert-Schmidt typeでないΛ_2-operatorが存在するので、$\tau_m > \tau_{HS}$ である。τ_m より真に強い sufficient topologyは知られていない。次の結果は、sufficient topology であるための必要条件を与える。

Theorem 4.1. Let τ be a locally convex topology on H; τ is defined by the family of continuous seminorms

$\{\|\ \|_\alpha\}$. If τ is sufficient, then for each $\|\ \|_\alpha$, the natural map : $H \to B_\alpha$ is dual completely summing, whre B_α is the associated Banach space.

Remark. τ が m.a.p. をもつとき、各 natural map : $H \to B_\alpha$ が dual completely summing ならば、定理2.5より、τ は sufficient topologyである。同様の結果は、τ が type 1 を仮定しても言える。すなわち、τ が m.a.p. or type 1 を仮定すると、sufficient であるための必要十分条件が得られたことになる。

Corollary 4.2. Let τ be a sufficient topology on H. If τ has type 2, then $\tau \leqq \tau_m$.

Remark. τ が unconditional basis, local unconditional structure, あるいはもっと一般に、G.L.P. をもつような場合は、τ が sufficient で finite cotype (cotype 2) をもてば、$\tau \leqq \tau_m$ ($\tau \leqq \tau_{HS}$) となる。特に、τ が S_p-type, $1 \leqq p \leqq 2$, のときは、τ が sufficient ならば、$\tau \leqq \tau_{HS}$ となる。

Hilbert space H 上の sufficient topologyについて、最後に、Okazaki [9], Sato [12] による結果を紹介する。

(E,τ):locally convex Hausdorff space、$H \subset E$ (dense)、inclusion map $i : H \to (E,\tau)$ は連続とする。H上の標準

Gaussian c.m. γ_H に対し、$i(\gamma_H)$が (E,τ) 上の Radon measure であるとき、(i,H,E) は A.W.S. という。このとき、$\tau \leqq \tau_m$ であるから、τ は sufficient である。

Theorem 4.3. Let (i,H,E) be an abstract Wiener space. Then for each continuous c.m. μ on E', the image $i'(\mu)$ is a Radon measure on H.

次に、 Banach space 上の sufficient topologyについて考える。

Theorem 4.4. Let τ be a locally convex topology on E' such that $\tau \leqq \tau_K$. Suppose that τ is Hilbertian.

(1) If τ is sufficient, then $\tau \leqq \tau_{HS}$.

(2) If every τ-continuous p-stable c.m., $0 < p < 2$, on E is Radon, then $\tau \leqq \tau_{HS}$.

(3) If E is of cotype 2, and if every τ-continuous Gaussian c.m. on E is Radon, then $\tau \leqq \tau_{HS}$.

(4) If τ is an S-topology, then E is isomorphic to a Hilbert space.

Remark. p = 2 のとき、(2) は成立しない。他方、(4) は Mushtari の結果である。(3) に関連しては、次が成立。

Theorem 4.5. E is of cotype 2 iff every Gaussian Radon probability measure on E is τ_{HS}-continuous.

Theorem 4.6. Suppose that E is of type p, $0<p\leqq 2$. Then the following assertions are equivalent.

(1) For each p-stable c.m. μ on E, μ is Radon iff it is τ_{HS}-continuous.

(2) E is isomorhic to a Hilbert space.

Remark. Every Banach space is of type p, $0<p<1$.

Theorem 4.7. Let τ be a locally convex topology on E' such that $\tau \leqq \tau_K$. Suppose that τ has type p, $0 < p < 2$. Then τ is sufficient iff every τ-continuous p-stable c.m. μ on E is Radon; that is, the τ-continuity is sufficient for μ to be Radon.

Remark. p = 2 のときは、τ が Hilbertian でも成立しない。これに関しては、次が成立。

Theorem 4.8. Let τ be a locally convex topology on E' such that $\tau \leqq \tau_K$. Suppose that E is of cotype 2, and τ has type 2. Then τ is sufficient iff every τ-continuous Gaussian c.m. on E is Radon.

ここで、Λ_p-operator T : E' → L_p, $0 < p \leqq 2$, で定義される E' 上の vector topology τ_p を導入する。(これに関しては、 Mushtari [8] 、Linde [4] を参照。)

Definition 4.4. τ_p is the weakest vector topology on E' making all Λ_p-operators $T : E' \to L_p$ continuous; τ_p is locally convex if $p \geqq 1$.

Remark. $\tau_p \leqq \tau_K$、$\tau_p = \tau_q$ for $0<p,q<1$、等は知られている。明らかに、τ_p は type q $(q < p < 2)$, τ_2 は Hilbertianである。τ_2-連続な任意のGaussian c.m. はRadonであることが知られている。次の結果はMushtariによる。

Theorem 4.9. E is of cotype 2 iff τ_2 is sufficient.

Definition 4.5. Let $0 < p, q \leqq 2$.

(1) E is said to be of M-cotype p (in the sense of Mushtari) if τ_p is sufficient.

(2) E is said to be of cotype (q,p) (in the sense of Mathe) if every τ_p-continuous q-stable c.m. on E is Radon.

Remark. 容易に分かることは、τ_p $(p<1)$ は necessary、従って、Eが S-spaceであることと、M-cotype p $(p<1)$ であることは同等である。定理4.9.は、cotype 2とM-cotype 2が同等であるということである。次の結果は知られているが(Linde[4])、定理4.7 からも従う。

Corollary 4.10. E is of M-cotype p iff it is of cotype (q,p) with $q < p$.

最後に、p-stable c.m. の class に対する S-topology

をもつ Banach space を考える。これについて、次が成立。

Theorem 4.11. Let $0 < p \leqq 2$. Then the followig assertions for E are equivalent.

(1) There exists a vector topology τ on E' such that for each p-stable c.m.μ on E, the τ-continuity of μ is necessary and sufficient for μ to be Radon.

(2) E is of cotype (p,p).

Remark. Every Banach space is of cotype (2,2).

M-cotype p, cotype(q,p) の Banach space について、多くの結果が知られている。また、 type p の classに対する S-topologyも考えられるが、それらは別の機会にふれたい。

References

[1] R.M.Dudley : Random linear functionals, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 1-24.

[2] L.Gross : Harmonic analysis on Hilbert space, Mem. Amer. Math. Soc. 46 (1963).

[3] H.H.Kuo : Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463, Springer-Verlag,1975.

[4] W.Linde : Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Tubner-Texte zur Math. 58,

Leipzig, 1983.

[5] W.Linde and A.Pietsch : Mappings of Gaussian cylindrical measures in Banach spaces, Theory Prob. Appl. 19 (1974), 445-460.

[6] P.Mathé : A note on classes of Banach spaces related to stable measures, Math. Nachr.115(1984), 189-200

[7] R.A.Minlos : Generalized random processes and their extension to measures, Trudy Moskov. Obsc. 8 (1959), 497-518.

[8] D.Kh.Mushtari : Spaces of cotype p, $0<p \leqq 2$, Theory Prob. Appl. 25 (1980), 105-117.

[9] Y.Okazaki : Bochner's theorem on measurable linear functionals of a Gaussian measure, Ann. Prob. 9 (1981),663-664.

[10] Y.Okazaki and Y.Takahashi : Accessible cylindrical measure and Bochner's theorem, J. Functional Anal. 67 (1986), 115-125.

[11] Y.Okazaki and Y.Takahashi : The converse of Minlos' theorem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. (to appear).

[12] H.Sato : Gaussian measurable dual and Bochner's theorem, Ann. Prob. 9 (1981), 656-662.

[13] V.Sazonov : A remark on characteristic functionals, Teor. Veroj. i. Prim. 3 (1958), 201-205.

[14] L.Schwartz : Geometry and probability in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 852, Springer-Verlag, 1981.

[15] Y.Takahashi and Y.Okazaki : On the relationship between γ_p-radonifying operators and other operator ideals in Banach spaces of stable type p, Math. Ann. 281 (1988), 145-156.

[16] Y.Umemura : Measures on infinite dimensional vector spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1 (1965), 1-47.